

УДК.681.518.5

Г.Б. Жиров

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник

В.О. Савран

МЕТОДИКА ОПИСУ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ МЕТОДОМ ПРОСТОРУ СТАНУ

У статті розглянуто підхід до аналізу нелінійних динамічних систем управління із застосуванням методу простору станів. Нелінійний елемент представляється набором еквівалентних лінійних схем, які послідовно включаються в загальну схему в змінних стану об'єкту управління.

Метод простору станів дозволяє дослідити процеси у часовій області по всіх координатних осях і мати цілісну картину про відпрацювання задавального діяння в усіх важливих при дослідженні точках системи. При цьому використовується векторно-матричний підхід до дослідження систем управління. Перевагою методу є можливість зручної алгоритмізації процесу дослідження систем управління.

Ключові слова: нелінійний об'єкт управління, система автоматичного управління, метод простору станів.

В статье рассмотрен подход к анализу нелинейных динамических систем управления с применением метода пространства состояний. Нелинейный элемент представляется набором эквивалентных линейных схем, которые последовательно включаются в общую схему в переменных состояния объекта управления. Дальнейший анализ динамики системы проводится известными методами.

Метод пространства состояний позволяет исследовать процессы во временной области по всем координатным осям и иметь целостную картину по отработке задающего воздействия во всех важных при исследовании точках системы. При этом используется векторно-матричный подход к исследованию систем управления. Преимуществом метода является возможность удобной алгоритмизации процесса исследования систем управления.

Ключевые слова: нелинейный объект управления, система автоматического управления, метод пространства состояний.

Paper describes an approach to the analysis of nonlinear dynamical control systems using the method of state space. Nonlinear element is represented by a set of equivalent linear circuits, which are sequentially included in the general scheme of the state variables of the control object. Further analysis of the dynamics of the system is carried out by known methods.

The method allows you to explore the state space of processes in the time domain for all the coordinate axes and have a complete picture of the master to simulate the impact of all the important points of the system. It uses a vector-matrix approach to the study of control systems. The advantage of the method is the possibility of a comfortable algorithmization of the research process of control systems.

Keywords: *nonlinear control object, automatic control system, method of state space.*

Більшість наявних динамічних систем управління є нелінійними, оскільки характеристики більшості з її елементів, наприклад підсилювачів, двигунів, вимірювальних елементів, лінійні лише на певній ділянці. Такі елементи систем мають певні обмеження, зону нечутливості та інші типи нелінійного перетворення сигналів, що накладають особливості на динаміку систем управління. Іноді в систему управління спеціально включають нелінійні елементи з метою забезпечення необхідних показників якості динаміки її роботи. Таким чином, актуально розглянути особливості опису систем, які містять нелінійні елементи, рівняннями стану і можливість дослідження їх динаміки з використанням методу простору станів.

Рівняння стану нелінійних систем знаходяться зі схем у змінних стану. Схеми в змінних стану складаються так само, як і для лінійних систем, із зазначенням місця нелінійних елементів. Місце нелінійних елементів у системі управління може бути різним, тому існує безліч структур нелінійних систем, однак методика їх побудови однакова. Розглянемо систему з одним нелінійним елементом, узагальнена схема якої наведена на рис. 1. Вона містить дві лінійні частини, між якими знаходиться нелінійний елемент N . Між лінійними частинами можуть бути прямі і зворотні зв'язки. Для побудови схеми в змінних стану такої нелінійної системи необхідно скласти схеми в змінних стану для лінійних частин і включити нелінійний елемент, місце якого визначено структурою нелінійної системи.



Рис. 1. Узагальнена схема нелінійної системи з одним нелінійним елементом

Вхідна величина $x_m(t)$ нелінійного елемента N в загальному випадку буде лінійною комбінацією складових вектора стану $x(t)$ і вектора входу $u(t)$ [1; 2]. Таким чином, вхідну величину $x_m(t)$ нелінійного елемента можна записати у вигляді:

$$x_m(t) = g_x x(t) + g_u u(t), \quad (1)$$

де g_x, g_u – вектори, що формують $x_m(t)$ з вектора стану та вектора входу $u(t)$.

Вихідна величина $x_n(t)$ нелінійного елемента N є результатом нелінійного перетворення вхідного сигналу $x_m(t)$, тобто $x_n(t) = N[x_m(t)]$. З урахування рівняння (1) отримуємо $x_n(t) = N[x, u]$.

Таким чином, у загальному вигляді рівняння стану нелінійної системи мають вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(x, u)x(t) + B(x, u)u(t) \\ y(t) &= C(x, u)x(t) + D(x, u)u(t),\end{aligned}\quad (2)$$

де $A(x, u), B(x, u), C(x, u), D(x, u)$ – матриці коефіцієнтів, управління, виходу та обходу розглянутої нелінійної системи.

Нелінійний елемент можна замінити сукупністю лінійних схем з подальшим їх використанням для дослідження нелінійних систем на основі рішень лінійних рівнянь стану. Розглянемо перетворення окремих типових нелінійностей [2].

1. Нелінійність типу “обмеження”.

Статична характеристика симетричної нелінійності типу “обмеження” наведена на рис. 2. Замінімо цю нелінійну залежність $x_n(t)$ від $x_m(t)$ лінійною залежністю у вигляді:

$$x_n(t) = K_n x_m + u_n. \quad (3)$$

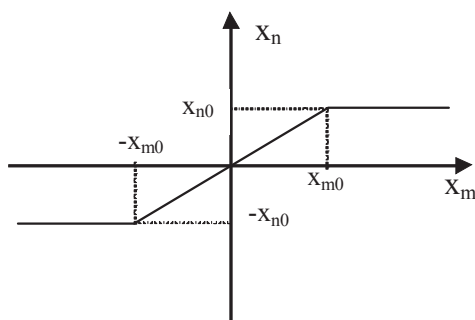


Рис. 2 Статична характеристика нелінійності типу “обмеження”

Параметри K_n та u_n набувають різних постійних значень залежно від діапазону змін x_m , а саме:

$$K_n = \frac{x_{n0}}{x_{m0}}, u_n = 0, \text{ якщо } |x_m| \leq x_{m0}$$

$$K_n = 0, u_n = x_{n0}, \text{ якщо } x_m > x_{m0}$$

Сталість параметрів та рівняння (3) в межах кожного з трьох зазначених діапазонів зміни дозволяє скласти дві еквівалентні лінійні схеми у вигляді сукупності пропорційного елемента з коефіцієнтом і додаткового входу (рис. 3).

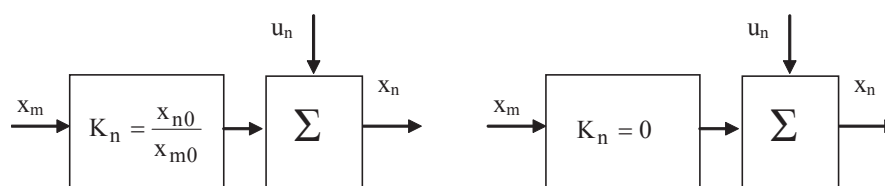


Рис. 3. Еквівалентні лінійні схеми нелінійності типу “обмеження”

Кожна зі схем правильна тільки для свого діапазону зміни вхідної величини нелінійного елемента x_m . Величина додаткового входу u_n для схеми, що зображена на рис. 3, залежить від значення x_m .

2. Релейна характеристика без гістерезису.

Релейна характеристика без гістерезису показана на рис. 4, а. Параметри K_n та u_n будуть мати такі значення:

$$\begin{aligned} K_n &= 0, u_n = 0, \text{ якщо } |x_m| \leq x_{m0} \\ K_n &= 0, u_n = x_{n0}, \text{ якщо } x_m > x_{m0} \\ K_n &= 0, u_n = -x_{n0}, \text{ якщо } x_m < -x_{m0} \end{aligned}$$

Еквівалентна лінійна схема релейної характеристики показана на рис. 4, б.

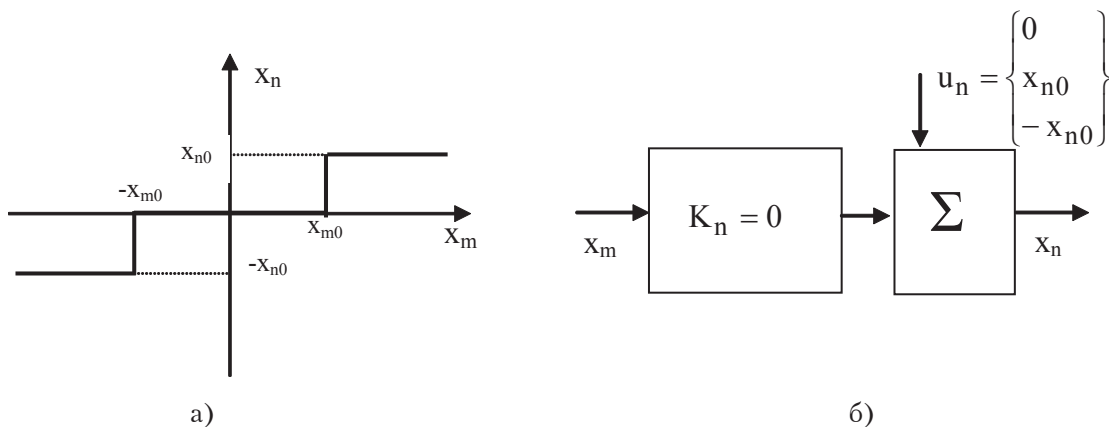


Рис. 4. Релейна характеристика та еквівалентна лінійна схема релейного елемента

Нелінійність типу “обмеження” із зоною нечутливості.

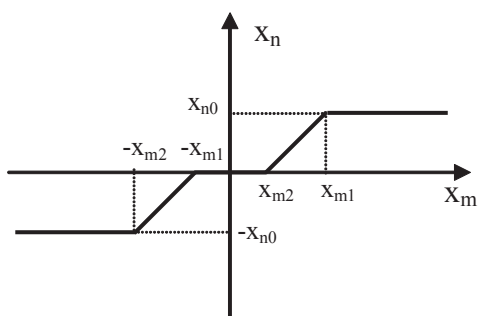


Рис. 5. Статична характеристика не лінійності типу “обмеження” з зоною нечутливості

Статична характеристика такої нелінійності зображена на рис. 5.

Вона буде мати дві еквівалентні лінійні схеми, показані на рис. 6.

Відповідно до статичної характеристики параметри K_n та u_n набувають різних постійних значень залежно від діапазону змін x_m , а саме:

$$\begin{aligned} K_n &= 0, u_n = 0, \text{ якщо } |x_m| \leq x_{m1} \\ K_n &= 0, u_n = x_{n0}, \text{ якщо } x_m > x_{m1} \\ K_n &= 0, u_n = -x_{n0}, \text{ якщо } x_m < -x_{m1} \end{aligned}$$

$$K_n = \frac{x_{n0}}{x_{m2} - x_{m1}}, u_n = -\frac{x_{n0}x_{m1}}{x_{m2} - x_{m1}}, \text{якщо } x_{m1} < x_m < x_{m2}$$

$$K_n = \frac{x_{n0}}{x_{m2} - x_{m1}}, u_n = \frac{x_{n0}x_{m1}}{x_{m2} - x_{m1}}, \text{якщо } x_{m2} < x_m < -x_{m1}$$

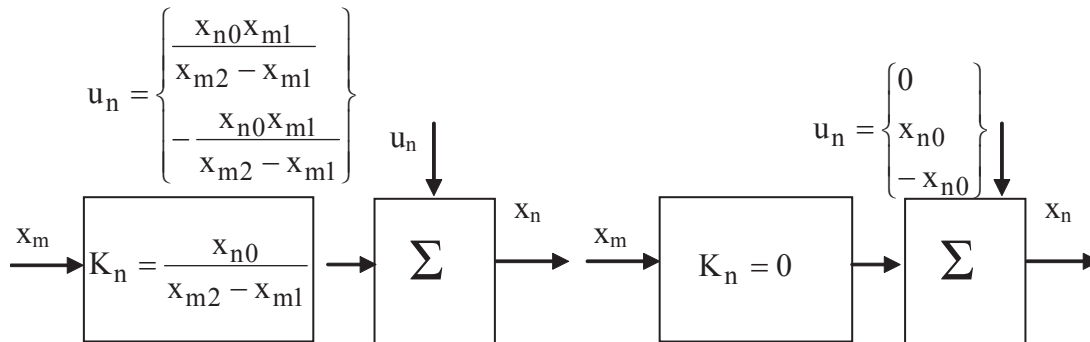


Рис. 6. Еквівалентні лінійні схеми нелінійності типу “обмеження” із зоною нечутливості

Розглянуті приклади представлення нелінійних елементів сукупністю еквівалентних лінійних схем розкривають методику такого подання для довільної нелінійної статичної характеристики, яка допускає кусково-лінійну апроксимацію. При цьому число еквівалентних лінійних схем дорівнює кількості лінійних ділянок нелінійного елемента з різними нахилами.

Еквівалентне представлення нелінійних елементів сукупністю лінійних схем дає можливість замість рівнянь стану нелінійних систем (2) застосовувати сукупність рівнянь стану лінійного виду:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Нелінійний елемент має декілька еквівалентних лінійних схем відповідно до кількості різних лінійних ділянок апроксимації нелінійної характеристики. Наприклад, релейні характеристики мають одну еквівалентну лінійну схему, нелінійність типу “обмеження” із зоною нечутливості – дві і т. д.

Для кожної еквівалентної лінійної схеми складається схема в змінних стану, яка включає лінійну частину нелінійної системи та еквівалентну схему нелінійності, місце включення якої відповідає розташуванню нелінійного елемента в системі.

З кожної схеми в змінних стану знаходять лінійні рівняння стану у вигляді рівнянь (4) і їх рішення [1; 2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi_i(t - t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_i(t - \tau) \mathbf{B} \mathbf{u}_n(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Вектор входу $u_n(t)$ включає в себе входи нелінійної системи та додатковий вхід u_n . Таким чином, розмірність матриці входу B збільшиться на один стовпець порівняно з цією ж матрицею для нелінійної системи без еквівалентного представлення нелінійного елементу. Матриця переходу $\Phi_i(t) = e^{A_i t}$ буде різною для кожної схеми в змінних стану, так як змінюються коефіцієнти K_n , і, відповідно, змінюється матриця A .

При заданих початкових умовах $x(t_0)$ і заданому векторі входу $u(t_0)$ нелінійна система визначає значення вхідної величини x_m нелінійного елемента із співвідношення (1) і таким чином визначається початковий вибір рівнянь стану і відповідного їм рішення (5), а також значення додаткового входу u_n .

Дослідження динаміки нелінійної системи необхідно починати з обраного рішення рівнянь стану. У процесі рішення необхідно контролювати величину x_m нелінійного елемента, яка є функцією векторів $x(t)$ та $u(t)$. При досягненні x_m граничного значення, при якому повинні змінюватися або значення додаткового входу u_n , або коефіцієнт K_n , відбувається зміна u_n або перехід до іншого рівняння стану відповідно. Застосування нових рівнянь стану і їх вирішення для дослідження динаміки нелінійної системи має починатися з нових початкових умов, які відповідають значенню вектора $x(t)$ в кінці попереднього діапазону зміни x_m .

Таким чином, контроль вхідної величини x_m нелінійного елемента визначає перехід від одних лінійних рівнянь стану до інших і зміну величини u_n . Послідовне використання різних лінійних рівнянь стану і їх стикування початковими умовами дозволяють провести дослідження динаміки нелінійної системи на необхідному відрізку часу t .

Перше рівняння (4) – це неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Його рішення має дві складові: вільну та вимушену. Перша залежить від динаміки системи за рахунок ненульових початкових умов $x(t_0)$ (співпадає з рішенням однорідного рівняння), друга – характеризує реакцію системи на зовнішній вплив $u(t)$ та додатковий вплив u_n нелінійного елемента. Вільна складова визначається рішенням однорідного рівняння $\dot{x}(t) = A_1 x(t)$, коли вектори вхідного діяння $u(t)$ та додаткового впливу u_n передбачаються нульовими. Для спрощення рішення (5) доцільно перетворити систему неоднорідних рівнянь (4) в однорідну такого виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{p1} x(t) \\ y(t) &= C_p x(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Мета цього перетворення полягає в тому, щоб отримати рівняння стану системи при наявності вхідних впливів $u(t)$ та додаткових впливів u_n нелінійного елемента.

Перетворення системи неоднорідних рівнянь в однорідні можливе, якщо вектори зовнішніх та додаткових впливів представити у вигляді рішення певного лінійного однорідного диференціального рівняння з постійними параметрами. Схема

в змінних стану для формування векторів $u(t)$ та u_n буде мати свої змінні стану $z(t)$ з початковим значенням $z(t_0)$.

Застосування наведеної методики можна розглянути на прикладі релейної системи (рис. 7)

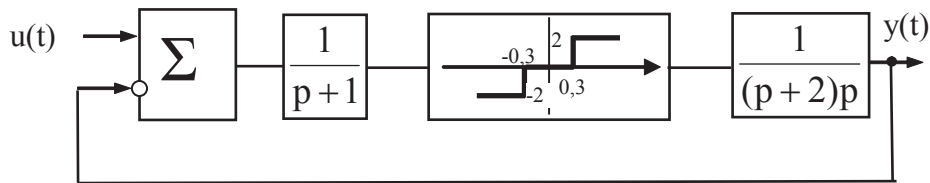


Рис. 7. Структурна схема релейної системи

Вхідний вплив $u(t)$ становить ступеневу функцію з амплітудою 3, $u(t)=3$, початкові умови вектору стану $x(t)$ – нульові. Релейний елемент замінюємо еквівалентною схемою (рис. 4), а лінійну частину системи представляємо розширеною схемою в змінних стану (рис. 8), яка включає змінні стану вхідного діяння $u(t)$ та додаткового впливу u_n .

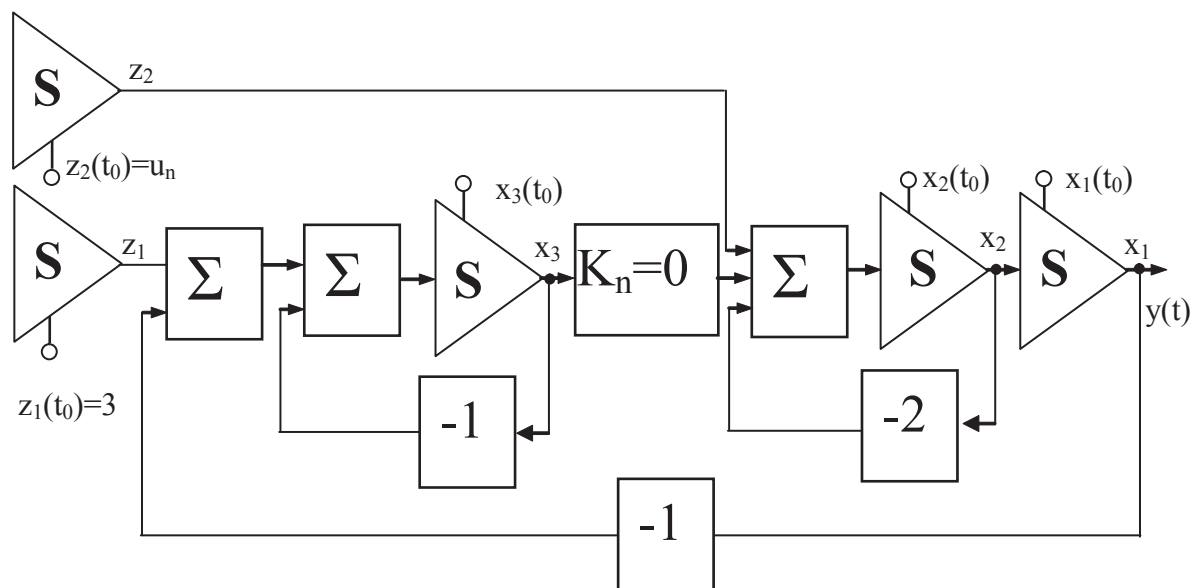


Рис. 8. Структурна схема релейної системи в змінних стану

Відповідно до структурної схеми в змінних стану (рис. 8) складаємо рівняння стану, причому за вихідні величини приймаємо вихід системи: $y_1=x_1$, виходи другого та третього інтеграторів: $y_2=x_2$, $y_3=x_3$, останні значення необхідні для визначення нових початкових умов, які відповідають значенню вектора стану $x(t)$ в кінці попереднього діапазону зміни значення x_3 .

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}_{Pi} \mathbf{x}(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}_p \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{де } \mathbf{A}_{Pi} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{C}_P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для знаходження вектора виходу $y(t)$ необхідно розв'язати перше рівняння і визначити залежність $x(t)$. Рішенням рівняння стану є вираз $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_{Pi}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) = L^{-1} \{ [p\mathbf{I} - \mathbf{A}_p]^{-1} \} \mathbf{x}(t_0)$, відповідно вектор виходу визначається як: $y(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}(t) = \mathbf{C}_p e^{\mathbf{A}_{Pi}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{C}_p L^{-1} \{ [p\mathbf{I} - \mathbf{A}_p]^{-1} \} \mathbf{x}(t_0)$.

Оскільки в схемі присутній нелінійний елемент, то наведені рівняння вирішуються для різних інтервалів часу і на початку кожного нового інтервалу вектор початкових умов $\mathbf{x}(t_0)$ має нове значення.

Так, для першого інтервалу часу $0 < t \leq 0,1$ вектор $\mathbf{x}^T(t_0) = | 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 |$, при $t=0,1$ значення x_3 досягає значення зони нечутливості релейного елемента. При цьому здійснюється зміна значення u_n стрибком від 0 до $u_n=2$. Таким чином, для другого інтервалу часу $0,1 < t \leq 4,12$, вектор $\mathbf{x}^T(t_0) = | 0 \ 0 \ 0,3 \ 3 \ 2 |$. При $t=4,12$ значення x_3 знову досягає значення зони нечутливості релейного елемента (x_3 зменшується і при $t=4,12$, $x_3=0,3$). Відповідно до релейної характеристики значення u_n стрибком змінюється від 2 до $u_n=0$. Третій інтервал часу $4,12 < t \leq 4,85$, а вектор $\mathbf{x}^T(t_0) = | 3,62 \ 0,99 \ 0,3 \ 3 \ 0 |$, при $4,85 < t \leq 6,74$, $\mathbf{x}^T(t_0) = | 4 \ 0,24 \ -0,3 \ 3 \ -2 |$; $6,74 < t \leq 7,8$, $\mathbf{x}^T(t_0) = | 272 \ -0,97 \ -0,3 \ 3 \ 0 |$ і т.д.

Вирішуючи наведені рівняння за допомогою математичного пакету, наприклад *mathematica*, можна побудувати графік вихідної величини або іншої величини, яку необхідно дослідити. На рис. 9 наведений лістинг програми в середовищі математичного пакету *mathematica* для побудови графіка перехідної функції, а на рис. 10 показана сама перехідна функція релейної системи [4].

```
F[t_] := Piecewise[{{2 (1/4 + e^(-2 t)/4 + t/2), t < 4.12}, {3.62 + 0.99 (1/2 - e^(-2 (t-4.12)/2)), 4.12 <= t < 4.85}, {4 + 0.24 (1/2 - e^(-2 (t-4.85)/2)) - 2 (1/4 + e^(-2 (t-4.85)/4 + t/2 - 4.85/2)), 4.85 <= t < 6.74}, {2.72 - 0.97 (1/2 - e^(-2 (t-6.74)/2)), 6.74 <= t < 7.83}, {2.235 - 1.5238800634155375 * t^7 (1/2 - e^(-2 (t-7.83)/2)) + 2 (1/4 + e^(-2 (t-7.83)/4 + t/2 - 7.83/2)), 7.83 <= t < 9.2}, {3.64 - e^(-2 (t-9.2)/2), 9.2 <= t < 10.55}, {3.6 + 0.067 (1/2 - e^(-2 (t-10.55)/2)) - 2 (1/4 + e^(-2 (t-10.55)/4 + t/2 - 10.55/2)), 10.55 <= t < 11.66}, {2.96 - 0.885 (1/2 - e^(-2 (t-11.66)/2)), 11.66 <= t < 13.5}, {2.53 - 0.022 (1/2 - e^(-2 (t-13.505)/2)) + 2 (1/4 + e^(-2 (t-13.505)/4 + t/2 - 13.505/2)), 13.505 <= t < 14.301}, {3.42 - e^(-2 (t-14.3016)/2), 14.302 <= t < 16.5777}, {3.414 + 0.005 (1/2 - e^(-2 (t-16.58)/2)) - 2 (1/4 + e^(-2 (t-16.58)/4 + t/2 - 16.58/2)), 16.5777 <= t < 17.213}, {3.142 - 0.99 (1/2 - e^(-2 (t-17.213)/2)), 17.213 <= t < 20.27}}];
Plot[F[t], {t, 0, 21}, GridLines -> {{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}, {1, 2, 3, 4}}, AxesLabel -> {"t", "h(t)"}, AxesStyle -> {RGBColor[0, 0, 0], Thickness[0.002]}]
```

Рис. 9. Лістинг програми для побудови графіка перехідної функції релейної системи.

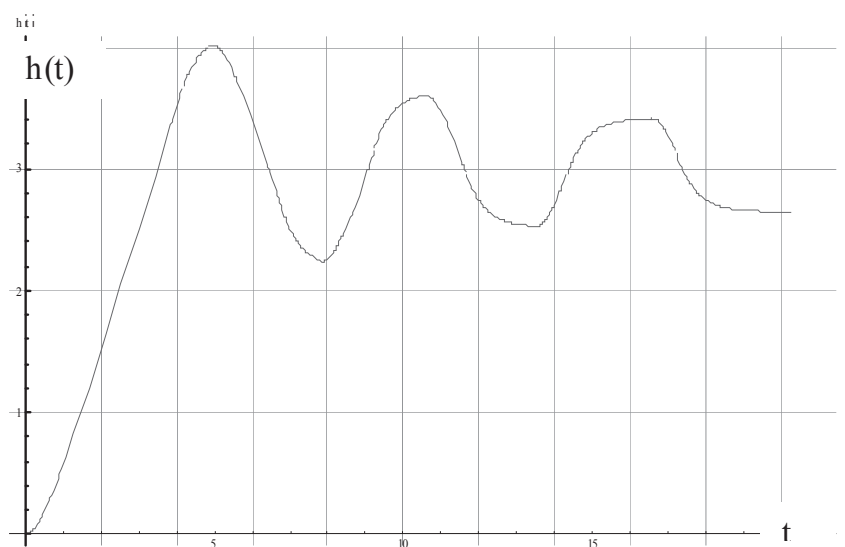


Рис. 10. Перехідна функція релейної системи

Проводячи моделювання тієї самої релейної системи в середовищі математичного пакету VisSim, отримано аналогічний графік перехідної функції (рис. 11).

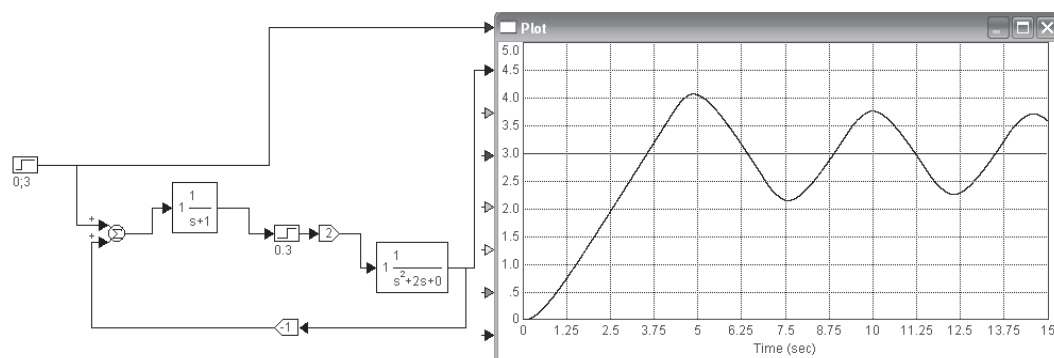


Рис. 11. Перехідна функція релейної системи в середовищі математичного пакету VisSim

Аналіз перехідних функцій, які отримані різними способами, показує, що похибка не перевищує 5 %.

Висновки

Досліджено методику опису нелінійних систем з використанням методу простору стану. Сутність методики полягає в представленні нелінійного елементу еквівалентною схемою у вигляді комбінації лінійних елементів, що призводить до появи додаткового входу. Таке представлення дозволяє використовувати результати лінійної теорії для дослідження нелінійних систем. Застосування методу простору станів для аналізу динаміки нелінійних систем дозволяє дослідити процеси в часовій області по всіх координатних осях і, таким чином, мати цілісну картину про відпрацювання задавального (збірного) діяння в усіх важливих при дослідженні

точках системи. Перевагою методу є можливість зручної алгоритмізації процесу дослідження систем управління.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Зайцев Г.Ф.* Теорія автоматичного управління / Г.Ф. Зайцев, В.К. Стектов, О.І. Брицький. – К. : Техніка, 2002. – 688 с.
2. *Козырев В.Д.* Применение цифровых ЭВМ при исследовании автоматических систем РЭС / В.Д. Козырев. – К. : КВИРТУ ПВО, 1976. – 184 с.
3. *Попович М.Г.* Теорія автоматичного керування / М.Г. Попович, О.В. Ковальчук. – К. : Либідь, 2007. – 656 с.
4. *Васильев А.Н.* Mathematica. Практический курс с примерами решения прикладных задач / А.Н. Васильев. – К. : БЕК, 2008. – 448 с.

Отримано 16.02.2015

Рецензент Рибальський О.В., доктор технічних наук, професор